FONCTIONS CONVEXES

1. : Montrer que $\int_0^1 e^{x^2}dx < \dfrac{e+1}{2}$.

2. : Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \qquad f\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right) \geqslant (1-t)\,f(x_1) + tf(x_2)$.

3. : Convexité et opérations.

   (a) Montrer (f, g convexes sur I)$\Longrightarrow$ ($f+g$ convexe sur I et αf convexe sur I pour $\alpha \geqslant 0$).

   (b) Donner un exemple de deux fonctions convexes positives sur $\mathbb{R}$ dont le produit n'est pas convexe. Trouver une condition suffisante simple pour que le produit de deux fonctions convexes positives sur une intervalle I soit convexe sur I.

   (c) Donner un exemple de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ dont la composée n'est pas convexe. Trouver une condition suffisante simple pour que la composée de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ soit convexe sur $\mathbb{R}$.

   (d) Soit f une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) convexe sur un intervalle I. Etudier la convexité de f^{-1}.

4. :

   (a) Montrer que si f est dérivable, convexe sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite finie en $+\infty$, alors la limite de sa dérivée est nulle en $+\infty$.
   Indication : TAF sur $[x, x+1]$.

   (b) Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus f convexe.

5. : Montrer que f concave positive sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ constante sur $\mathbb{R}$.

6. : Formule d'interpolation linéaire et application à la démonstration de $f'' \geqslant 0 \Rightarrow f$ convexe.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$, et les points $M_1 \left| \begin{array}{c} x_1 \\ f(x_1) \end{array} \right.$ et $M_2 \left| \begin{array}{c} x_2 \\ f(x_2) \end{array} \right.$.Déterminer g pour que $y = g(x)$ soit l'équation de la droite (M_1M_2)

   (a) On pose $h(x) = f(x) - g(x) - \lambda(x-x_1)(x-x_2)$. On fixe $x_0 \in]x_1, x_2[$, et on choisit λ de façon à ce que $h(x_0) = 0$.
   Montrer que
   $$(\exists c \in]x_1, x_2[)\ \ h''(c) = 0$$
   en déduire
   $$f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{2} f''(c)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$
   (cette formule est la *formule d'interpolation linéaire*).

   (b) Démontrer ($f'' \geqslant 0$ sur I) $\Rightarrow f$ convexe sur I.

7. * : Montrer que si f est continue sur I alors
   $$\forall x, y \in I \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2} \Rightarrow f \text{ convexe sur } I$$

8. * : Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I . Montrer que f est convexe sur I ssi pour tous réels $a < b$ de I et tout réel λ la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \lambda x$ est majorée sur $[a, b]$ et atteint sa borne sup en a ou b.
   Indication : la condition équivaut simplement à $g(x) \leqslant \max\left(g(a), g(b)\right)$.

9. * :

   (a) Soit f une fonction convexe sur $[a, b], a \leqslant b$; montrer que $\displaystyle\int_a^b f \leqslant (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(b) Réciproque : soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que pour tout $a < b$ dans I on a $\int_a^b f \leqslant (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$; montrer que f est convexe sur I.

10. * : Soit f une fonction convexe de classe C^1sur $[a,b], a \leqslant c \leqslant b$.

   (a) Montrer que $\int_a^b f \geqslant (b-a)\left(f(c) + \left(\dfrac{a+b}{2} - c\right) f'(c)\right)$; écrire les cas $c = a, c = \dfrac{a+b}{2}, c = b$.

   (b) En déduire que $\int_a^b f \geqslant (b-a)\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + (b-a)\dfrac{f'(b)-f'(a)}{4}\right)$.

11. : Réciproque du 10 : soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que pour tout $a < b$ dans I on a $\int_a^b f \geqslant (b-a) f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$; montrer que f est convexe.

   Indication : montrer la contraposée en utilisant la CNS du 8.

12. * : Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ un pentagone convexe quelconque inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R dans le plan orienté.

   On pose $2\theta_p = \widehat{\left(\overrightarrow{OA_p}, \overrightarrow{OA_{p+1}}\right)}$ avec $0 \leqslant \theta_p < \pi$ pour $0 < p \leqslant 5$ avec la convention $A_6 = A_1$.

   (a) Démontrer que le périmètre du pentagone est

$$p = 2R\left[\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4 + \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)\right]$$

   (b) Démontrer que la fonction $x \mapsto -\sin x$ est convexe sur $[0,\pi]$.

   (c) En déduire que $p \leqslant 2R\left[4\sin\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{4}\right) + \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)\right]$

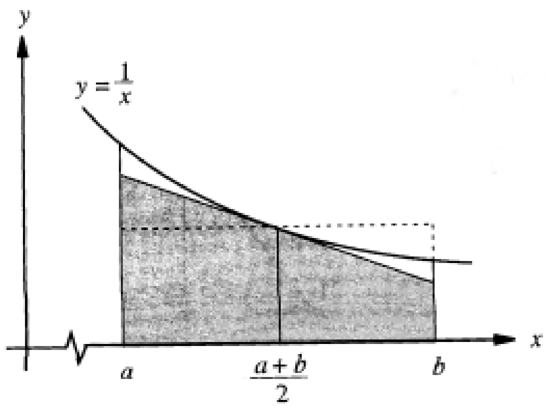
   (d) Montrer que la fonction $\varphi : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4\sin\frac{x}{4} + \sin x\end{array}\right.$ admet un maximum absolu sur $]0,\pi[$.

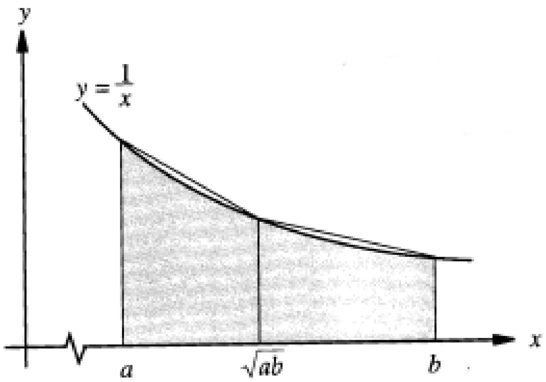
   (e) Déduire des questions précédentes que parmi tous les pentagones convexes inscrits dans un cercle, celui qui a le plus grand périmètre est le pentagone régulier.

13. * : On pose $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

   Etudier f et montrer qu'elle est convexe sur $\mathbb{R}$ (on pourra remarquer que $f(x) + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}\coth\dfrac{x}{2}$, ce qui permet de mettre $f''(x)$ sous la forme $\dfrac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}^3\frac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2} - \operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$).

14. * :





En vous aidant de la figure ci-dessus, trouver et rédiger une démonstration du fait que si $0 < a < b$, alors

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

inégalités reliant les moyennes géométrique, logarithmique, et arithmétique de deux réels positifs.